

LAS LOGICAS IGRp

Oscar Pino Ortiz

Hace unos cinco años, el investigador boliviano Iván Guzmán de Rojas puso en evidencia la estructura matemática de la lengua aymara. Estableció de manera formal la existencia de un anillo algébrico relacionado de forma natural con la lógica trivalente de esta lengua. Decimos que una lógica es trivalente si contempla la posibilidad de asignar tres valores distintos a una sentencia o proposición: falso, verdadero o dudoso.

Por lo general las lenguas occidentales se sustentan en la lógica bivalente, o de dos valores, verdadero y falso, eliminando la posibilidad de una ambigüedad incómoda, famoso principio del tercero excluido. Basta una lectura somera de los trabajos de los griegos, de Aristóteles en particular, para captar la importancia de este principio en el razonamiento filosófico occidental.

La lengua aymara se estructuró de manera distinta, dando al desarrollo mental de esa civilización andina un rumbo por demás peculiar y diferente. Esta característica, que el estudio de Iván Guzmán de Rojas muestra claramente, es suficiente para comprender la difícil comunicación entre dos mundos vecinos y sin embargo distantes. No es nada fácil, para quienes razonamos apoyándonos en el principio del tercero excluido, entender las inferencias que admiten la duda como parte integrante del pensamiento deductivo.

Por ello el presente trabajo no pretende hacer un paralelo entre el aymara y el castellano, sino simplemente formalizar, o terminar de formalizar, la lógica trivalente aymara y extender la estructura de la misma a unas lógicas polivalentes que vamos a llamar lógicas IGRp, en honor al científico que inició la investigación en esta área del saber andino.

Para comenzar asignemos como lo hacen los matemáticos símbolos a los valores lógicos. Si admitimos que una afirmación es o bien verdadera o bien falsa, diremos que una afirmación sólo puede tomar los valores 0 (falso) o 1 (verdadero). El hecho de utilizar símbolos se fundamenta en la facilidad que estos aportan en el momento de estudiar razonamientos complejos. Las frases que contienen dos o más afirmaciones ligadas por el operador “no” y los conectivos “y” u “o” o “entonces” o “sin embargo” o tantos otros aún más sutiles como “entonces necesariamente” o “entonces posiblemente”, se hacen más llevaderas y manejables gracias a los símbolos.

Mejor todavía: es posible demostrar que, en el caso de la lógica bivalente, es decir la nuestra, basta definir un conectivo (la barra de Scheffer) pues todos los demás pueden construirse en base a él. Lo habitual es utilizar el operador “no” y el conectivo “o”, para construir todos los otros.

Los valores lógicos 0 y 1, provistos de los conectivos “o” e “y”, forman lo que los matemáticos llamamos un cuerpo o campo conmutativo. Se trata de un cuerpo famoso: Z_2 .

En el caso de la lógica aymara, que es trivalente, la situación es bastante más complicada, pues los conectivos posibles ya no son 16, con un solo operador unario digno de interés, la negación que conocemos bien, sino pasan a ser 19683 y los operadores unarios a 27, la mayoría de ellos útiles e interesantes.

Un primer intento, hecho hace unos cincuenta años atrás por Lukasiewicz, se basó en una elección arbitraria. En efecto, con la voluntad de “extender” la lógica bivalente a una trivalente que de cierta manera “contenga” a la primera, Lukasiewicz tuvo que elegir un operador binario que cumpla la función de la implicación. Al hacerlo,

encontró que no todos los teoremas clásicos de la lógica aristotélica permanecían válidos. Si bien, era razonable que el principio del tercero excluido desapareciera, parecía perjudicial que el modus ponens o la transitividad de la implicación resulten inválidas. Una cohorte de matemáticos abundaron en propuestas alternativas pero siempre con resultados aparentemente insatisfactorios. Lo que sí salió a la luz, de forma inequívoca, fue el hecho de que en todos los intentos se hacía una elección arbitraria. La pregunta evidente se planteó entonces: ¿Existe una manera natural de extender la lógica bivalente en una trivalente?

El valor profundo de los trabajos de Iván Guzmán de Rojas reside en la respuesta que da a esa pregunta: Sí, existe una forma natural de encarar esa extensión y la clave se encuentra en una lengua andina: el aymara.

Sin embargo la **naturalidad** de su propuesta contenía en sí un potencial que era preciso poner de manifiesto. La extensión de la lógica bivalente a una polivalente fue estudiada por Chang, en un intento de formalizar los trabajos de Lukasiewicz, dando lugar a la definición de sus MV-álgebras y sus lógicas n -valuadas, con n un número natural cualquiera. En el caso IGR fue menester restringir n , para tomar sólo los números primos p . Pero, a cambio, la teoría matemática desarrollada durante los siglos XVIII y XIX, en el área del álgebra lineal, proveyeron las herramientas necesarias para demostrar la naturalidad de la extensión general. En efecto, un pequeño equipo de investigadores de la Carrera de Matemática de la USIP¹ mostraron que existe una biyección natural entre los operadores unarios de la lógica IGR $_p$ y los polinomios a una variable a coeficientes en el cuerpo Z_p , y otra biyección igualmente natural entre los operadores binarios de la lógica IGR $_p$ y los polinomios a dos variables a coeficientes en el cuerpo Z_p . La demostración se

¹ Eid Ahmed, Gumucio Rodrigo, Pino Oscar, Veneros Erwin

sustenta en los trabajos de los matemáticos europeos Alejandro Teófilo Vandermonde (1735-1796) y Leopoldo Kronecker (1823-1891).

La principal consecuencia, resultado que valida por sí solo el trabajo realizado, es que ahora sabemos de que es posible trabajar con una lógica multivaluada de manera totalmente similar a lo habitual con una bivaluada y que, es posible resolver un sistema de proposiciones con p valores lógicos resolviendo un sistema de ecuaciones en un anillo de polinomios.

IGR y su escuela han abierto, de este modo, un camino promisorio al desarrollo de la **prognosis**, un área del conocimiento que tendrá ciertamente cada vez más y más importancia en las ciencias políticas, económicas y sociales.

Información Técnica

Como se mencionó anteriormente, algunos investigadores (Kleene, Lukasiewicz, Pierce) propusieron extensiones trivalentes para ciertos conectivos lógicos. Kleene, por ejemplo propuso las siguientes:

f_{\neg}		f_{\wedge}	1	0		i	f_{\vee}	1	0		i	f_{\Rightarrow}	1	0		i
1	0	1	1	0		i	1	1	1		i	1	1	0		i
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0		i	0	1	1	1	1
i	i	i	i	0	i	i	i	1	i		i	i	1	i		i

Las cuales definen la negación, la conjunción, la disyunción y la implicación y donde i es el tercer valor lógico. Esta forma de extensión es evidentemente arbitraria pues se basa en la intuición del investigador.

Chang estructuró la propuesta de Lukasiewicz dando lugar a una teoría formal: las MV-álgebras.

Una MV-álgebra es una estructura $\langle M, \oplus, \neg, 0 \rangle$ cuya base es un monoide conmutativo al que se le imponen las condiciones adicionales:

$$\neg\neg x = x$$

$$1 = \neg 0$$

$$x \oplus 1 = 1$$

Todas las propuestas de extensión de la lógica bivalente en una trivalente, encontraron ciertas dificultades para comprender el hecho de que, en algunos casos, el silogismo modus ponens se invalidaba y, en otros, la transitividad de la implicación no era una tautología. Para salvar el problema se puso incluso en tela de juicio el concepto de tautología y el de contradicción.

El verdadero problema era el de encontrar una manera *natural* para definir la extensión deseada.

Iván Guzmán de Rojas, al estudiar el idioma aymara, observó que esta lengua había incorporado a su estructura una lógica trivalente basada en tres valores, -1=falso, 0=dudoso y 1=verdadero, que se comportaban de la siguiente manera:

+	-1	0	1
-1	-1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	-1

·	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Donde “+” es la disyunción y “·” es la conjunción. Reconocemos con facilidad al anillo Z_3 . La *naturalidad* de la lógica basada en este anillo (llamado aymara siwi por IGR) es evidente.

Haciendo un paréntesis, nos sorprende constatar que la lengua aymara (o sus constructores si acaso nos inclinamos a pensar que se trata de una lengua construida) incorpora el manejo del grupo S_3 , pues los sufijos *wa*, *ka*, *ti*, *kati*, *titi* y *tika*, se combinan siguiendo la ley de composición de ese grupo (o más bien forman un grupo isomorfo a S_3).

IGR establece que los operadores binarios de la lógica trivalente aymara se construyen en base a los operadores unarios de la siguiente manera:

$$k(x, y) = p(x) + q(y) + r(xy)$$

Donde p , q y r son operadores unarios, + la disyunción y k el operador binario definido en base a aquellos. De este hecho IGR deduce que existe una relación estrecha entre los operadores binarios y los polinomios a dos variables del tipo:

$$k(x, y) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3y + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^2y^2$$

Con a_i un elemento de Z_3 . Lo que le permite afirmar que la resolución de los problemas inferenciales en una lógica trivalente se puede obtener por métodos puramente algebraicos.

El aporte del grupo de investigación de la Carrera de Matemática de la Universidad Simón I. Patiño es el de haber extendido la extensión de IGR. La propuesta consiste en asociar a *todo* operador binario un polinomio a coeficientes en Z_3 del tipo:

$$k(x, y) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3y + a_4xy + a_5x^2y + a_6y^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y^2$$

Lo que establece una biyección natural entre ambos conjuntos. La demostración de la biyectividad pasa por el cálculo del determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La tentación evidente es la de extender la lógica trivalente (y por ende la bivalente) en una polivalente que conserve la flexibilidad y naturalidad de la lógica IGR₃. Lo que se hizo gracias a los resultados establecidos por el matemático alemán Kronecker en el área del cálculo tensorial.

Así se asoció a cada operador binario de una lógica a p valores (con p primo) un polinomio a dos variables y a coeficientes en Z_p . La imposición “ p primo” viene de la necesidad de trabajar sobre un cuerpo o campo conmutativo. El polinomio asociado es

$$k(x, y) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-1} a_{i+p \cdot j} x^i y^j$$

La matriz de traspaso se escribe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{p-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & \dots & 3^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & (p-1)^3 & \dots & (p-1)^{p-1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{p-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & \dots & 3^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & (p-1)^3 & \dots & (p-1)^{p-1} \end{bmatrix}$$

Observamos que se trata del producto de Kronecker (correspondiente del producto tensorial de las aplicaciones lineales asociadas) de dos matrices de Vandermonde, cuyo determinante no nulo puede calcularse mediante la fórmula

$$|A \otimes B| = |A|^{o(B)} \cdot |B|^{o(A)}$$

Queda así abierto un camino *natural* para el estudio de las lógicas polivalentes.